УДК 517.9

Л. Фурсевич
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розглядаються деякі питання, пов'язані з розкладом довільної функції за власними функціями спектральної задачі з параметром у граничній умові для напівосі $\Omega = [0, \infty]$, коли функція q - неперервна на кожному скінченному інтервалі. Наприклад для рівняння

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \left| \lambda - q(x) \right| \psi = 0 \quad \left(x \in (0;1) \right) \tag{1}$$

на границі $x = 0$ області Ω задана гранична умова

$$\psi = \lambda \frac{d\psi}{dx}. \tag{2}$$

Вводиться простір $L^2[0,\infty]$ елементами якого є $U(x) = \left[u|_{\Omega}, u_1|_{x=0} \right]$, де $u(x) \in L_2(0,\infty)$; u_1 - комплексне число. Норма в L^2 визначається співвідношенням $\|U\|_{L^2}^2 = \int\limits_0^{\infty} |u(x)|^2 dx + |u_1|^2$. В $L^2[0,\infty]$ визначимо оператор **A**, який відповідає даній спектральній задачі: $\left[u|_{\Omega}, \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} \right] \to \left[-\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u \Big|_{\Omega}, u|_{x=0} \right]$.

Область визначення $D(A)$ щільна в $L^2[0,\infty)$, причому оператор A-симетричний і напівобмежений знизу. Тому існує оператор B, який є самоспряженим розширенням в $L^2[0,\infty)$ оператора A. Задача на власні значення оператора B $\mathrm{B}U = \lambda U$ еквівалентна задачі (1), (2).

Нехай $\varphi(x,\lambda)$ і $\theta(x,\lambda)$ - такі розв'язки рівняння (1), що

$$\varphi(0,\lambda) = \lambda, \quad \varphi'(0,\lambda) = 1; \ \theta(0,\lambda) = -1, \quad \theta'(0,\lambda) = 0. \tag{3}$$

Вронскіан цих розв'язків $W_x(\varphi,\theta) = W_0(\varphi,\theta) = 1$, отже загальний розв'язок рівняння (1), може бути представлений у вигляді $\theta + l\varphi$.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє рівняння (1), а $w(x)$-це ж рівняння з λ' замість λ, то має місце співвідношення

$$(\lambda' - \lambda) \int\limits_0^b f(x) w(x) dx = W_0(f, w) - W_b(f, w). \tag{4}$$

Приймаючи в (4) $\lambda = u + iv$, $\lambda' = u - iv$ та $w = \overline{f}$, одержимо

$$2v \int\limits_0^b \left| f(x) \right|^2 dx = iW_0\left(f, \overline{f}\right) - iW_b\left(f, \overline{f}\right).$$

У загальному випадку, коли область зміни функції $k(\lambda)$ включає як дискретні так і неперервні множини, розклад буде містити як ряд, так і невласний інтеграл.